

Δίκτυα & Ροές

- Ένα **δίκτυο** είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G(V, E)$, με αφετηριακό κόμβο $s \in V$ και τερματικό κόμβο $t \in V$, όπου κάθε ακμή έχει χωρητικότητα που δίνεται από τη συνάρτηση

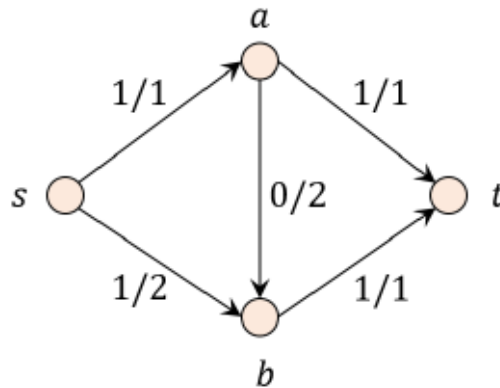
$$c: (u, v) \in E \rightarrow \mathfrak{R}$$

Μία ροή του δικτύου είναι μία συνάρτηση $f: (u, v) \in E \rightarrow \mathfrak{R}$, η οποία ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

- Περιορισμός χωρητικότητας:** $f(u, v) \leq c(u, v)$, για κάθε ακμή $(u, v) \in E$
- Διατήρηση ροής:** $\sum_{(u,v) \in E} f(u, v) = \sum_{(v,w) \in E} f(v, w)$, για κάθε κόμβο $v \in V - \{s, t\}$

Ροές σε Δίκτυα

- Ο περιορισμός χωρητικότητας σημαίνει ότι η ροή μίας ακμής δεν μπορεί να ξεπερνά τη χωρητικότητα της
- Η διατήρηση ροής σημαίνει ότι για κάθε ενδιάμεσο κόμβο $v \neq s, t$ η συνολική ροή που εισέρχεται στον v είναι ίση με τη συνολική ροή που εξέρχεται από τον v
- Οι ενδιάμεσοι κόμβοι δεν παράγουν, αλλά ούτε και καταναλώνουν ροή



- Ένα δίκτυο και μία ροή του με τιμή 2
- Η ετικέτα σε κάθε ακμή δίνει τη ροή και τη χωρητικότητα της ακμής

Τομές σε Δίκτυα

- Μία **τομή** (S, T) του δικτύου G είναι μία διαμέριση του συνόλου των κόμβων V σε σύνολα S και T με $s \in S$ και $t \in T$
- Η **χωρητικότητα της τομής** (S, T) , την οποία συμβολίζουμε με $c(S, T)$, ορίζεται ως το άθροισμα της χωρητικότητας των ακμών που κατευθύνονται από το s προς το t :

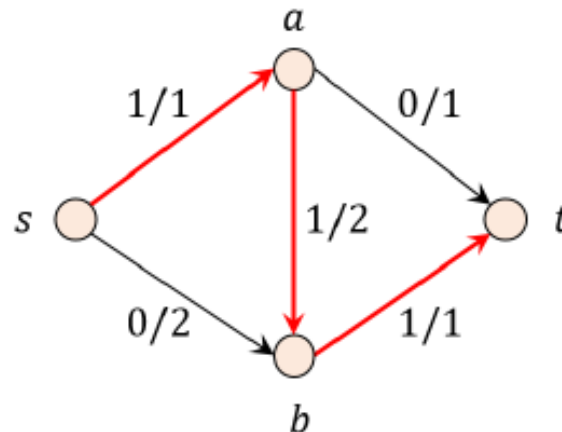
$$c(S, T) = \sum_{(v,w) \in E(S,T)} c(v, w),$$

$$\text{όπου } E(S, T) = \{(v, w) \in E : v \in S, w \in T\}$$

- Μία τομή (S, T) είναι μία ελάχιστη τομή του δικτύου G , εάν έχει ελάχιστη χωρητικότητα μεταξύ όλων των τομών του δικτύου
- Για οποιαδήποτε ροή f και τομή (S, T) ισχύει $|f| \leq c(S, T)$
- **Θεώρημα Μέγιστης Ροής-Ελάχιστης Τομής:** Έστω f^* μία μέγιστη ροή και (S^*, T^*) μία ελάχιστη τομή του δικτύου – Τότε $|f^*| = c(S^*, T^*)$

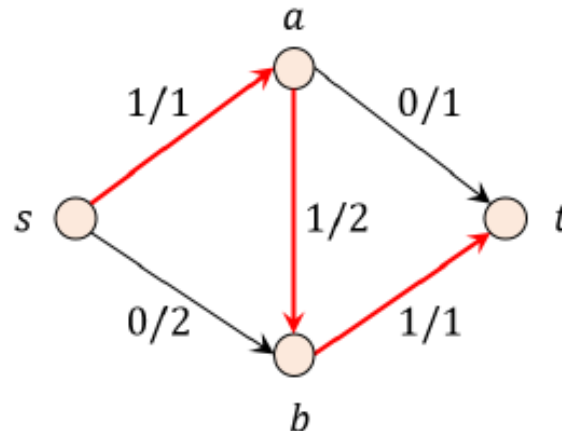
Αυξητικές Διαδρομές

- Μία πρώτη απόπειρα υπολογισμού μέγιστης ροής δικτύου είναι μέσω επαναληπτικού αλγόριθμου εύρεσης αυξητικών διαδρομών
- **Αυξητική διαδρομή:** μονοπάτι από τον s στον t , το οποίο μπορεί να δεχθεί επιπλέον ροή
- Σε κάθε επανάληψη: βρίσκουμε μία αυξητική διαδρομή P και αυξάνουμε την τρέχουσα ροή f κατά δ μονάδες κατά μήκος της P , όπου η μέγιστη δυνατή αύξηση της ροής κατά μήκος της P
- Οι επαναλήψεις συνεχίζονται, μέχρι να μην υπάρχει άλλη αυξητική διαδρομή στο δίκτυο



Προβλήματα με Αυξητικές Διαδρομές

- Αν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνεται στο δίκτυο G , είναι δυνατό ο αλγόριθμος να τερματίσει χωρίς να έχει υπολογίσει τη μέγιστη ροή
- Για να εξασφαλίσουμε ότι θα υπολογίσει τη μέγιστη ροή, πρέπει να έχουμε τη δυνατότητα να ανακαλέσουμε μέρος της ροής που έχουμε διοχετεύσει μέσω κάποιων ακμών
- Αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε εάν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνει σε ένα βοηθητικό δίκτυο, που ονομάζουμε υπολειπόμενο δίκτυο G_f και εξαρτάται από την τρέχουσα ροή f

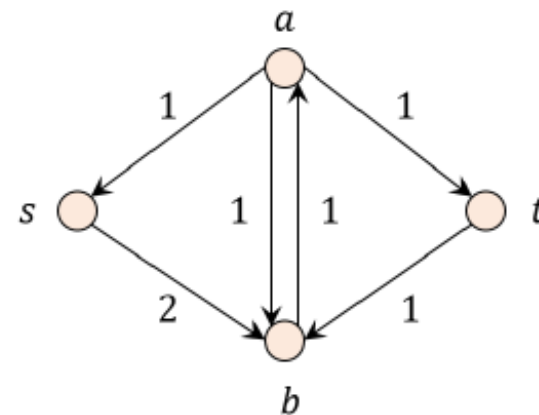
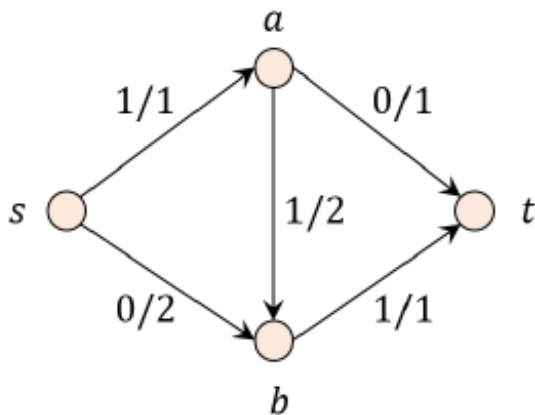


Υπολειπόμενο Δίκτυο

- Το υπολειπόμενο δίκτυο $G_f(V, E_f)$ έχει τους ίδιους κόμβους με το αρχικό δίκτυο G
- Μία ακμή (u, v) ανήκει στο G_f και έχει χωρητικότητα $c_f(u, v)$, όταν:
 - Η (u, v) είναι ακμή του G και έχει ροή $f(u, v) < c(u, v)$, τότε $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$
 - Η (v, u) είναι ακμή του G και έχει ροή $f(u, v) > 0$, τότε $c_f(u, v) = f(v, u)$
- Στην πρώτη περίπτωση καλούμε την ακμή (u, v) του G_f **ευθύδρομη** (γιατί η ίδια είναι ακμή του δικτύου G)
- Στη δεύτερη περίπτωση την καλούμε **ανάδρομη** (γιατί η αντίστροφη της είναι ακμή του δικτύου G)
- Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι το υπολειπόμενο δίκτυο έχει το πολύ τις διπλάσιες ακμές από το αρχικό δίκτυο

Υπολειπόμενο Δίκτυο – Παράδειγμα

- Η αύξηση της ροής κατά μία μονάδα κατά μήκος του μονοπατιού s - a - b - t έχει ως αποτέλεσμα να μην υπάρχει άλλη αυξητική διαδρομή στο δίκτυο (αριστερά)
- Εάν η αναζήτηση των αυξητικών διαδρομών γίνεται στο υπολειπόμενο δίκτυο, τότε η μέθοδος αυτή θα υπολογίσει τη μέγιστη ροή (δεξιά)



Αλγόριθμος Ford-Fulkerson

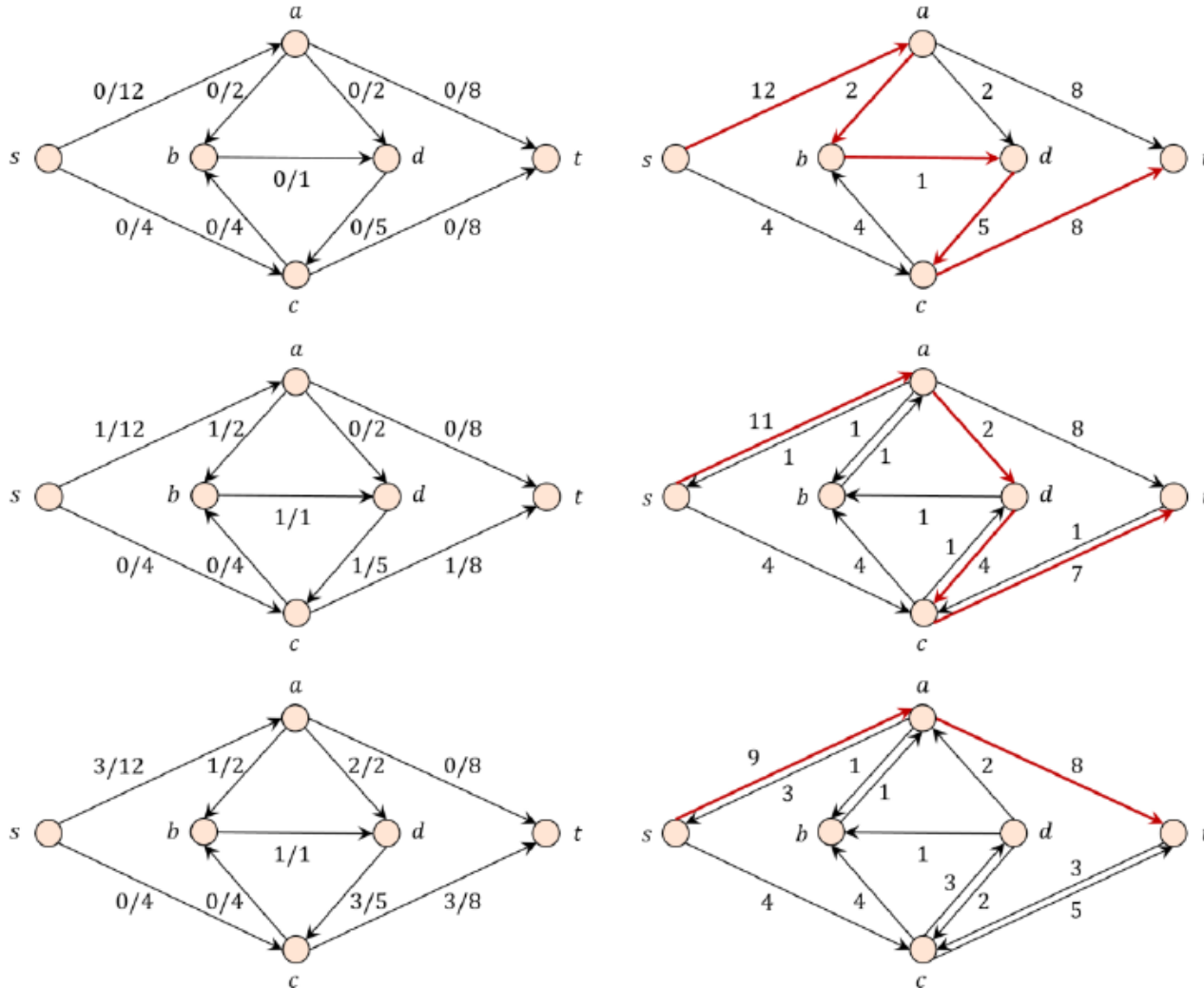
- Ο αλγόριθμος Ford-Fulkerson βασίζεται στον επαναληπτικό υπολογισμό αυξητικών διαδρομών στο υπολειπόμενο δίκτυο G_f
- Η αύξηση της ροής κατά μήκος του γίνεται ως εξής
 - Για κάθε ακμή (u, v) του μονοπατιού P , θέτουμε $f'(u, v) = f(u, v) + \delta$, εάν η (u, v) είναι ευθύδρομη, και $f'(v, u) = f(v, u) - \delta$, εάν η (u, v) είναι ανάδρομη, δηλαδή η (v, u) είναι στο G

Αλγόριθμος 4.3: Ford_Fulkerson

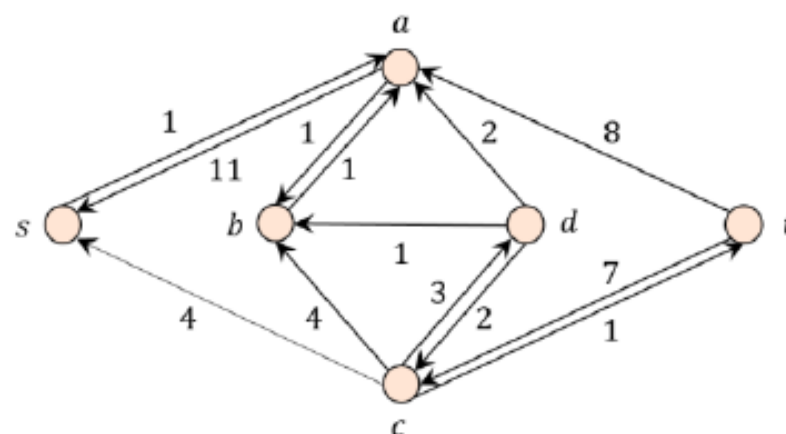
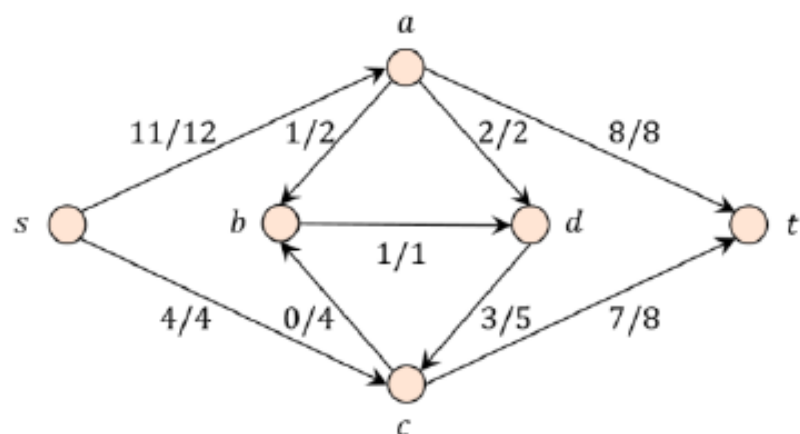
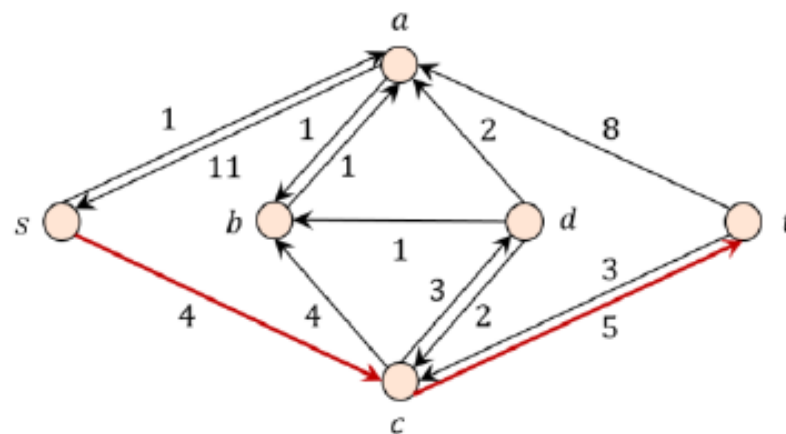
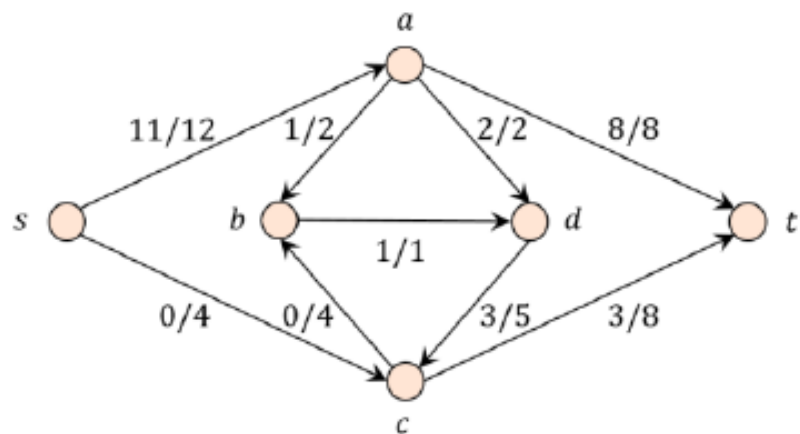
1. Θέτουμε ως αρχική ροή $f \leftarrow 0$ και υπολειπόμενο δίκτυο $G_f \leftarrow G$;
 2. **όσο** υπάρχει μονοπάτι P από τον s στον t στο G_f , επανάλαβε
 - $\delta = \min\{c_f(u, v) \mid (u, v) \in P\}$; // ελάχιστη χωρητικότητα ακμής του P
 - αυξάνουμε τη ροή f κατά δ μονάδες κατά μήκος του P ;
 - υπολογίζουμε το νέο υπολειπόμενο δίκτυο G_f ;
 3. **επίστρεψε** τη ροή f .
-

Αλγόριθμος Ford-Fulkerson – Παράδειγμα (I)

Η αυξητική διαδρομή που επιλέγουμε κάθε φορά είναι αυτή που προηγείται λεξικογραφικά με βάση τα ονόματα των κόμβων



Αλγόριθμος Ford-Fulkerson – Παράδειγμα (II)



Παράδειγμα Ελάχιστης Τομής

Ελάχιστη τομή στο δίκτυο του προηγούμενου παραδείγματος

