ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΜΟΝΤΕΛΑ – ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ: ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

ΔΡ. Γ. ΜΑΤΣΟΠΟΥΛΟΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Δ.Π.Μ.Σ. «ΤΕΧΝΟ-ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ»

*ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ*

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΔΕΔΟΜΕΝΑ – ΜΟΝΤΕΛΑ – ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ: ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΝΤΑΣ ΤΗΝ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

«Λήψη αποφάσεων υπό ισχυρή αβεβαιότητα»

Μέθοδοι Λήψης Αποφάσεων

- **Μέθοδοι λήψης αποφάσεων υπό ισχυρή αβεβαιότητα:**

1) **Maximin**
2) **Generalized Maximin**
3) **Minimax Regret**
4) **Principle of Insufficient Reason**

Παράδειγμα 1

- **Ο ιδιοκτήτης ενός βιβλιοπωλείου πρέπει να αποφασίσει πόσα αντίτυπα του βιβλίου «Data, Models and Decisions» θα παραγγείλει για την ακαδημαϊκή χρονιά που αρχίζει. Η ζήτηση για το βιβλίο εξαρτάται από τον αριθμό των μαθημάτων που θα το χρησιμοποιήσουν, στα τοπικά πανεπιστήμια.**

Παράδειγμα 1

Ο Πίνακας Αποτελεσμάτων του προβλήματος:

Εναλλακτικές Αποφάσεις	Αριθμός Μαθημάτων			
	7	**8**	**9**	**10**
280	2.800 €	2.720 €	2.640 €	2.480 €
320	2.600 €	3.200 €	3.040 €	2.880 €
360	2.400 €	3.000 €	3.600 €	3.440 €
400	2.200 €	2.800 €	3.400 €	4.000 €

Κριτήριο Maximin

- **Το κριτήριο Maximin βασίζεται στον προσδιορισμό του χειρότερου δυνατού σεναρίου (*worst-case scenario*).**
- **Αντιπροσωπεύει μια συντηρητική προσέγγιση λήψης αποφάσεων, καθώς επιδιώκει να διασφαλίσει το καλύτερο (max) από τα ελάχιστα (min) εγγυημένα αποτελέσματα.**

Κριτήριο Maximin

- **Η βέλτιστη απόφαση προκύπτει από τα ακόλουθα βήματα:**

1) **Για κάθε εναλλακτική απόφαση, καταγράφεται το χειρότερο πιθανό αποτέλεσμα.**
2) **Επιλέγεται η απόφαση που αντιστοιχεί στο καλύτερο «χειρότερο πιθανό αποτέλεσμα».**

Κριτήριο Maximin

Αν Α το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων, S το σύνολο των διαφορετικών τιμών της μη ελεγχόμενης παραμέτρου και W(α,s) το αποτέλεσμα κάθε συνδυασμού, τότε το Maximin κριτήριο αποτυπώνεται ως:

$$\max_{a\in A}\left\{\min_{s\in S} W(a,s)\right\}$$

Κριτήριο Maximin - Παράδειγμα

Εναλλακτικές Αποφάσεις	Αριθμός [illegible]μάτων				
	7	8	9	[illegible]	Απόφαση
280	2.800 €	2.720 €	2.640 €	2.48[illegible]	2.480 €
320	2.600	3.200 €	3.040 €	2.880 €	2.600 €
360	2.400	3.000 €	3.600 €	3.440 €	2.400 €
400	2.200	2.800 €	3.400 €	4.000 €	2.200 €

Η βέλτιστη απόφαση

MIN(2.800;2.720;2.640;2.480)

Κριτήριο Generalized Maximin

- **Το κριτήριο Generalized Maximin βασίζεται στη στάθμιση μεταξύ του καλύτερου και του χειρότερου δυνατού σεναρίου.**
- **Αντιπροσωπεύει μια λιγότερο συντηρητική προσέγγιση λήψης αποφάσεων από αυτή του Maximin, καθώς συνυπολογίζει και το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα από την επιλογή κάθε απόφασης.**

Κριτήριο Generalized Maximin

- **Η βέλτιστη απόφαση προκύπτει από τα ακόλουθα βήματα:**
  1) **Για κάθε εναλλακτική απόφαση, καταγράφονται το καλύτερο και το χειρότερο πιθανό αποτέλεσμα.**
  2) **Τα δύο αποτελέσματα σταθμίζονται με έναν συντελεστή r. Ο εν λόγω συντελεστής παίρνει τιμές μεταξύ των [0, 1] και αντιπροσωπεύει την πιθανότητα πραγματοποίησης του χειρότερου σεναρίου.**
  3) **Επιλέγεται η απόφαση που αντιστοιχεί στο καλύτερο «σταθμισμένο πιθανό αποτέλεσμα».**

Κριτήριο Generalized Maximin

Αν Α το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων, S το σύνολο των διαφορετικών τιμών της μη ελεγχόμενης παραμέτρου και W(α,s) το αποτέλεσμα κάθε συνδυασμού, τότε το Generalized Maximin κριτήριο αποτυπώνεται ως:

$$\max_{a\in A}\left\{r\cdot\min_{s\in S}W(a,s)+(1-r)\cdot\max_{s\in S}W(a,s)\right\}$$

Κριτήριο Generalized Maximin- Παράδειγμα

Εναλλακτικές Αποφάσεις	Αριθμός Μαθημάτων				
	7	8	9	10	Απόφαση για r = 0,80
280	2.800	2.720 €	2.640 €	2.480	2.544 €
320	2.600	3.200	3.040 €	2.880 €	2.720 €
360	2.400	3.000 €	3.600	3.440 €	2.640 €
400	2.200	2.800 €	3.400 €	4.000	2.560 €

Η βέλτιστη απόφαση

0,8 * MIN(2.800;2.720;2.640;2.480) + 0,2 * MAX(2.800;2.720;2.640;2.480)

Κριτήριο Minimax Regret

- **Το κριτήριο Minimax Regret βασίζεται στην ελαχιστοποίηση του μέγιστου κόστους ευκαιρίας που συνεπάγεται η επιλογή κάθε εναλλακτικής απόφασης.**

Κριτήριο Minimax Regret

1) **Για κάθε τιμή της μη ελεγχόμενης παραμέτρου, προσδιορίζονται:**
   a) **η απόφαση με το καλύτερο αποτέλεσμα,**
   b) **η διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος της παραπάνω απόφασης και των αποτελεσμάτων των υπολοίπων (κόστος ευκαιρίας).**
2) **Για κάθε απόφαση, εντοπίζεται το μέγιστο κόστος ευκαιρίας ως προς όλες της τιμές της παραμέτρου.**
3) **Επιλέγεται η απόφαση με το μικρότερο «μέγιστο κόστος ευκαιρίας».**

Κριτήριο Minimax Regret

Αν A το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων, S το σύνολο των διαφορετικών τιμών της μη ελεγχόμενης παραμέτρου και W(α,s) το αποτέλεσμα κάθε συνδυασμού, τότε το Minimax Regret κριτήριο αποτυπώνεται ως:

$$\min_{a\in A}\ \max_{s\in S}\left\{\max_{a\in A} W(a,s) - W(a,s)\right\}$$

Κριτήριο Minimax Regret - Παράδειγμα

Αποφάσεις	Πίνακας Αποτελεσμάτων			
	7	8	9	10
280	2.800	2.720 €	2.640 €	2.480 €
320	2.600 €	3.200	3.040 €	2.880 €
360	2.400 €	3.000 €	3.600	3.440 €
400	2.200 €	2.800 €	3.400 €	4.000

Αποφάσεις	Πίνακας Κόστους Ευκαιρίας			
	7	8	9	10
280	0 €	480 €	960 €	1.520 €
320	200 €	0 €	560 €	1.120 €
360	400 €	200 €	0 €	560 €
400	600 €	400 €	200 €	0 €

Κριτήριο Minimax Regret - Παράδειγμα

Πίνακας Κόστους Ευκαιρίας					Μέγιστο Κόστος
Αποφάσεις	7	8	9	10	
280	0 €	480 €	960 €	1.[illegible] €	1.520 €
320	200 €	0 €	560 €	1.12[illegible]	1.120 €
360	400 €	200 €	0 €	560 €	560 €
400	600 €	400 €	200 €	0 €	600 €

Η βέλτιστη απόφαση

MAX(0;480;960;1.520)

Insufficient Reason

- **Η μέθοδος Insufficient Reason βασίζεται στην παραδοχή πως όλες οι τιμές της μη ελεγχόμενης παραμέτρου έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν.**
- **Στην πραγματικότητα είναι μια ειδική περίπτωση του κριτηρίου της μέγιστης αναμενόμενης αξίας.**
- **Μπορεί να χρησιμοποιηθεί <u>μόνο</u> εφόσον είναι γνωστά όλα τα πιθανά ενδεχόμενα.**

Insufficient Reason

- **Για κάθε απόφαση, αθροίζονται τα πιθανά αποτελέσματα ως προς όλες της τιμές της παραμέτρου.**
- **Επιλέγεται η απόφαση με το μεγαλύτερο άθροισμα.**

Σε αντιστοιχία με τα προηγούμενα, το Insufficient Reason κριτήριο αποτυπώνεται ως:

$$\max_{a \in \mathrm{A}} \sum_{s \in S} W(a, s)$$

Insufficient Reason - Παράδειγμα

Πίνακας Αποτελεσμάτων					Άθροισμα
Αποφάσεις	**7**	**8**	**9**	**10**	
280	2.800 €	2.720 €	2.640 €	2.[illegible] €	**10.640 €**
320	2.600 €	3.200 €	3.040 €	2.880	**11.720 €**
360	2.400 €	3.000 €	3.600 €	3.440 €	**12.440 €**
400	2.200 €	2.800 €	3.400 €	4.000 €	**12.400 €**

Η βέλτιστη απόφαση

Κριτήρια Λήψης Αποφάσεων

- **Τα προηγούμενα κριτήρια δεν είναι ισοδύναμα. Με άλλα λόγια, μπορεί να συμβεί κάθε ένα από αυτά να προκρίνει διαφορετική απόφαση ως βέλτιστη.**
- **Δεν έχει νόημα μια διάκριση σε σωστά και λάθος κριτήρια. Η επιλογή ενός κριτηρίου εξαρτάται μόνο από τον τρόπο με τον οποίο θέλει να αντιμετωπίσει κανείς την αβεβαιότητα ενός δεδομένου προβλήματος.**

Κριτήρια Λήψης Αποφάσεων

- **Ωστόσο, τα κριτήρια Maximin και Minimax Regret – όταν χρησιμοποιηθούν σωστά – μπορούν να οδηγήσουν σε <u>εύρωστες</u> (*robust*) αποφάσεις.**

Ολική ευρωστία (Global robustness)

Έστω $C(x,s)$ **το κόστος από την εφαρμογή μιας στρατηγικής x, όταν το ενδεχόμενο s πραγματοποιηθεί.**

Ορίζω το regret R ως:

$$R(x,s) = C(x,s) - \underset{r\in A}{Min}\, C(r,s),\ \forall x \in A, s \in S.$$

όπου r η στρατηγική που θα ακολουθούσα αν είχα τέλεια πληροφορία

Ολική ευρωστία (Global robustness)

Έστω ότι στην περίπτωση τέλειας πληροφορίας, η βέλτιστη απόφαση προκύπτει από τη βελτιστοποίηση:

$$M(s) = \underset{x}{Min} \ c_s^T x$$

Τότε το regret της στρατηγικής x υπολογίζεται ως:

$$R(x,s) = c_s^T \cdot x - M(s)$$

Ολική ευρωστία (Global robustness)

Η Minimax Regret (MMR) στρατηγική είναι η βέλτιστη λύση του ακόλουθου προβλήματος:

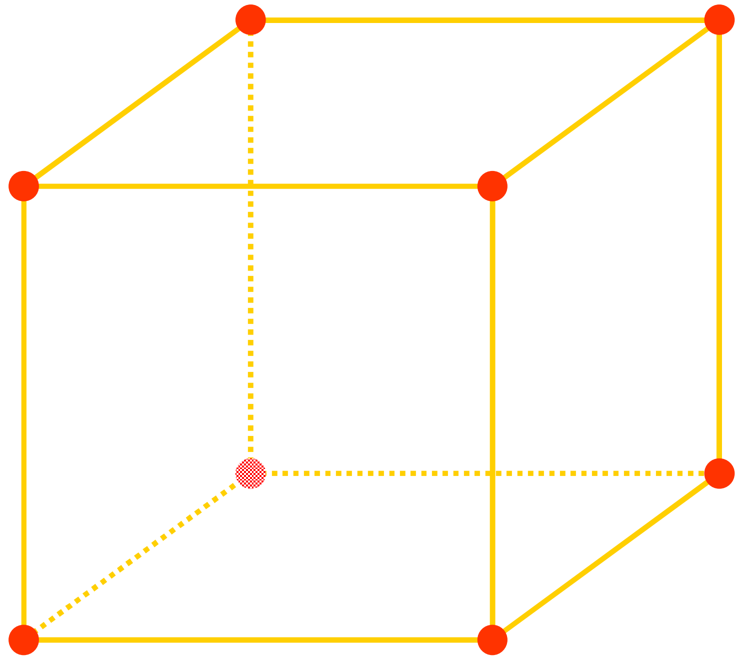
$$\underset{x \in A}{Min} \; \underset{s \in S}{Max} \left(c_s^T \cdot x - M(s) \right)$$

Το Minmax πρόβλημα αυτό μπορεί να μετασχηματιστεί σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης, με την εφαρμογή του μετασχηματισμού:

$\underset{x,\phi}{Min} \; \phi$ **, υπό τον περιορισμό** $\phi \geq c_s^T \cdot x - M(s)$**,** $\forall s \in S$

Ολική ευρωστία (Global robustness)

Αν ορίσω μέγιστες και ελάχιστες τιμές για όλες τις αβέβαιες παραμέτρους που συναποτελούν κάθε ενδεχόμενο s, τότε το προηγούμενο πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να επιλυθεί προσεγγιστικά αν ο χώρος S περιοριστεί μόνο στις ακραίες τιμές του.



Τοπική ευρωστία (Local robustness)

Αν A το σύνολο των εναλλακτικών αποφάσεων, $\hat{s}$ μια καλή εκτίμηση για την τιμή της μη ελεγχόμενης παραμέτρου S, $D(R,\hat{s})$ το σύνολο των τιμών της S που απέχουν «απόσταση» R από την αρχική εκτίμηση και r_C η ελάχιστη αποδεκτή τιμή για τα αποτελέσματα, τότε τί υποδηλώνει το ακόλουθο κριτήριο;

$$\max_{a \in A} \left\{ R : \min_{d \in D(R,\hat{s})} W(a,s) \geq r_C \right\}$$

Τοπική ευρωστία – Παράδειγμα 1

Έχετε τη δυνατότητα να επενδύσετε σε N αριθμό μετοχών, με u_i άγνωστη ετήσια απόδοση κάθε μίας.

Το ετήσιο κέρδος μπορεί να γραφεί ως:

$$R(q,u) = \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot u_i = q^T \cdot u ,$$

όπου q_i το ποσό που θα επενδύσετε σε κάθε μετοχή και

$Q = \sum_{i=1}^{N} q_i$ **ο συνολικός προϋπολογισμός σας.**

Τοπική ευρωστία – Παράδειγμα 1

Αν $\hat{u}_i$ **η τρέχουσα εκτίμησή σας για την απόδοση της μετοχής** i**, τότε μπορεί να οριστεί η περιοχή γύρω από την εκτίμηση αυτή ως:**

$$D(R,\hat{u}) = \left\{ u \in \Re^N : u = \hat{u} + v, \;\; v^T W v = R^2 \right\}, \; R \geq 0$$

Αν ο τετραγωνικός πίνακας W είναι συμμετρικός, τότε η σχέση $v^T W v = R^2$ **ορίζει ένα ελλειψοειδές γύρω από το μηδέν. Αν μόνο τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα W είναι μη μηδενικά, η σχέση ορίζει έναν κύκλο γύρω από το μηδέν.**

Τοπική ευρωστία – Παράδειγμα 1

Η ζητούμενη απόφαση q προκύπτει από την επίλυση του ακόλουθου προβλήματος βελτιστοποίησης:

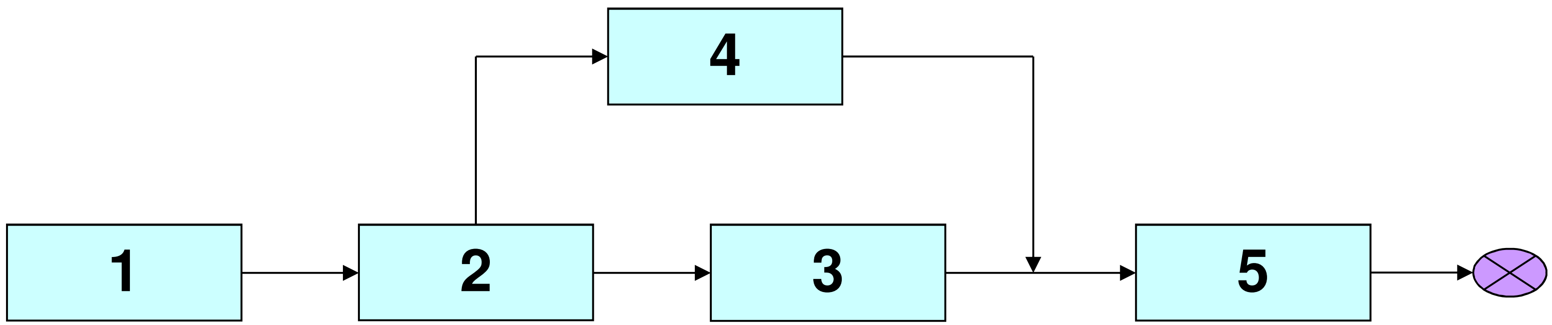
$$\max_{q,v} v^T W v$$

υπό τους περιορισμούς:

$$q^T(\hat{u}+v) \geq r_c \,,\; \sum_{i=1}^{N} q_i = Q \,,\; q \geq 0$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Έστω ένα έργο που αποτελείται από τις ακόλουθες 5 ενότητες εργασίας:**



Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Το διάγραμμα των εργασιών αποτελείται από M = 2 μονοπάτια:**

1) **1 – 2 – 3 – 5**
2) **1 – 2 – 4 – 5**

- **Το διάγραμμα των εργασιών αποτελείται από N = 5 ενότητες εργασίας.**

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

Στο μονοπάτι m, η ενότητα εργασίας που ακολουθεί την ενότητα n αρχίζει όταν έχει ολοκληρωθεί το f_{mn} **ποσοστό της. Ως αποτέλεσμα, ορίζεται ο πίνακας F:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

Οι ονομαστικοί (εκτιμώμενοι) χρόνοι για την ολοκλήρωση κάθε ενότητας εργασίας είναι:

$\hat{t}_1 = \hat{t}_2 = \hat{t}_5 = 1$ **και** $\hat{t}_3 = q,\ \hat{t}_4 = 1 - q$

Η τιμή του q αντιπροσωπεύει τη δυνατότητα του Υπεύθυνου του Έργου να κατανέμει τους απαιτούμενους πόρους για την ολοκλήρωση των ενοτήτων 3 και 4, όπως αυτός κρίνει καλύτερο.

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Το σύνολο των τιμών των απαιτούμενων χρόνων για την ολοκλήρωση των ενοτήτων εργασίας που απέχουν απόσταση R από τις ονομαστικές τους τιμές μπορεί να προκύψει από τη σχέση:**

$$D(R,\hat{t}_n) = \left\{ t : \frac{|t_n - \hat{t}_n|}{\hat{t}_n} \le R, \quad n = 1,2,..5 \right\} \quad R \ge 0$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Ο συνολικός χρόνος για την ολοκλήρωση κάθε ενός από τα δύο μονοπάτια m δίνεται από τη σχέση:**

$$C_m = \sum_{n=1}^{N} f_{nm} \cdot t_n, \quad m = 1,2$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Ο συνολικός χρόνος για την ολοκλήρωση του έργου δίνεται από τη σχέση:**

$$T = \max_{m=1,2} \sum_{n=1}^{N} f_{nm} \cdot t_n$$

- **Το ζητούμενο είναι:** $T \leq t_c$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Αναζητώ το μεγαλύτερο R για το οποίο το χειρότερο αποτέλεσμα εξακολουθεί να είναι αποδεκτό:**

$$\max\left\{ R : \max_{t \in D(R,\hat{t})} T \leq t_c \right\}$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Ισχύουν:**

$$t_n \leq \hat{t}_n + R \cdot \hat{t}_n$$

$$\max_{t \in D(R,\hat{t})} C_m = \max_{t \in D(R,\hat{t})} \sum_{n=1}^{N} f_{nm} \cdot t_n = \hat{C}_m + R \cdot \hat{C}_m$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Η ευρωστία κάθε μονοπατιού m προκύπτει από το μέγιστο R που ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:**

$$\hat{C}_m + R \cdot \hat{C}_m = t_c \Rightarrow R_m = \frac{t_c - \hat{C}_m}{\hat{C}_m}$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Ισχύουν:**

$$\hat{C}_1 = \hat{t}_1 + \hat{t}_2 + q + \hat{t}_5 = 3 + q$$

$$\hat{C}_2 = \hat{t}_1 + \frac{1}{2} \cdot \hat{t}_2 + 1 - q + \hat{t}_5 = 3,5 - q$$

$$R_1(q) = \frac{t_c}{3 + q} - 1$$

$$R_2(q) = \frac{t_c}{3,5 - q} - 1$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Η ευρωστία του έργου ως προς το χρόνο ολοκλήρωσής του είναι η:**

$$R(q) = \min_{m=1,2} R_m(q)$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Ο αντικειμενικός στόχος είναι η βελτιστοποίηση της ευρωστίας του έργου, άρα αναζητώ το q για το οποίο ισχύει:**

$$\max \; R(q) = \max \; \min_{m=1,2} R_m(q)$$

Εύρωστες Αποφάσεις – Παράδειγμα 2

- **Οι δύο συναρτήσεις ευρωστίας έχουν αντίθετο είδος μονοτονίας (1-φθίνουσα, 2-αύξουσα), οπότε το βέλτιστο σημείο είναι το σημείο τομής τους:**

$$\frac{t_c}{3+q} - 1 = \frac{t_c}{3{,}5-q} - 1 \Leftrightarrow q = 0{,}25$$